

# Feynmanintegrale

**Bachelorarbeit**

der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Bern  
vorgelegt von

**Michael Bögli**

2008

Betreut durch

**Prof. Dr. J. Gasser**

Institut für theoretische Physik, Universität Bern

### **Zusammenfassung**

Diese Arbeit handelt von Feynmanparameterintegralen, welche ihren Ursprung in der Quantenfeldtheorie haben. Feynmanparameterintegrale stellen holomorphe Funktionen dar. In dieser Arbeit werden analytische Eigenschaften dieser Funktionen aufgezeigt und Methoden zu ihrer numerischen Berechnung vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt auf einer Methode, die den Integrationspfad verschiebt. Weiter werden mithilfe dieser Methoden einige Feynmanparameterintegrale numerisch berechnet und diskutiert.

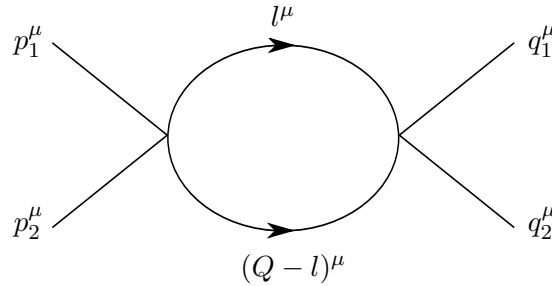
# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Mathematischer Hintergrund</b>	<b>4</b>
2.1	Cauchy-Integrale . . . . .	4
2.2	Integration über Kurvenstücke . . . . .	6
2.3	Dispersionsrelation . . . . .	11
2.4	Die $\varepsilon$ -Methode . . . . .	13
2.5	Die $\lambda$ -Methode . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Anwendung: Feynmanamplituden</b>	<b>19</b>
3.1	Einschleifenintegrale . . . . .	19
3.1.1	Diskussion . . . . .	19
3.1.2	Graphischer Vergleich der beiden Integrationsmethoden . . . . .	20
3.2	Zweischleifenintegrale . . . . .	21
3.2.1	$z_{\text{ver}}$ . . . . .	21
3.2.2	$z_{\text{box}}$ . . . . .	22
3.3	Anomale Schwellen . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>27</b>
A.1	Kurze Zusammenfassung der komplexen Analysis . . . . .	27
A.2	Singularitäten und analytische Fortsetzungen . . . . .	28

## 1 Einleitung

Diese Arbeit untersucht Feynman-Schwinger-Parameter-Integrale (kurz Feynman-Integrale), welche ihre Anwendung im Lösen von Integralen in der Quantenfeldtheorie finden.

Die Quantenfeldtheorie beschreibt das Verhalten und die Reaktionen subatomarer Teilchen. Jeder Reaktion – beispielsweise der Streuung zweier Pionen – wird eine Reihe von sogenannten Feynman-Diagrammen zugeordnet. Je genauer das gewünschte Resultat sein soll, desto mehr solcher Diagramme müssen in Betracht gezogen werden. Ein Beispiel eines Feynman-Diagramms für die Pion-Pion-Streuung wird in Abbildung 1 präsentiert.



**ABBILDUNG 1:** Feynman-Diagramm einer Pion-Pion-Streuung.  $p_i^\mu$  bezeichnen die Impulse der einlaufenden Pionen,  $q_i^\mu$  die Impulse der Auslaufenden Pionen und  $l^\mu$ , bzw.  $(Q-l)^\mu$  Impulse von internen Teilchen, wobei  $Q^\mu = (p_1 + p_2)^\mu$  den Gesamtimpuls beschreibt.

Jedes dieser Diagramme kann durch ein Integral umschrieben werden. Das Diagramm aus Abb. 1 entspricht einem Integral über den Viererimpuls  $d^4l$  des internen Teilchens, wobei die beiden Pfeile je einen Term der Form  $\frac{1}{M_\pi^2 - l^2 - i\varepsilon}$  bzw.  $\frac{1}{M_\pi^2 - (Q-l)^2 - i\varepsilon}$  zum Integranden beisteuern.

Der komplexe Teil  $-i\varepsilon$  hat seinen Ursprung in der Tatsache, dass in der Quantenfeldtheorie sogenannte kausale Propagatoren benutzt werden; dieser Teil erlaubt die Auswertung solcher Integrale für physikalische Impulse.

Nun kann die Methode von Feynman und Schwinger benutzt werden, die besagt, dass:

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(x_1 + \cdots + x_n - 1) x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_n^{\alpha_n - 1}}{[x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n]^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}},$$

wobei  $\Gamma(\alpha)$  die Gamma-Funktion und  $\delta(x)$  die Dirac-Delta-Funktion bezeichnen. Die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  heißen Feynman-Parameter. In unserem Fall vereinfacht sich diese Formel und ergibt angewandt auf unser Integral

$$\int d^4l \frac{1}{AB} = \int d^4l \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2}.$$

Das Integral über den Viererimpuls lässt sich dadurch einfach ausführen; übrig bleibt das Integral über den Feynman-Parameter  $x$ . Dieses Integral lautet (bis auf konstante Faktoren):

$$F(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \ln(1 - zx(1-x) - i\varepsilon) dx, \quad \text{mit } z = \frac{Q^2}{M_\pi^2}.$$

Bei der Pion-Pion-Streuung steht  $M_\pi \sqrt{z}$  für die Totalenergie im Schwerpunktsystem. Es gilt

$$z = \frac{(p_1 + p_2)^2}{M_\pi^2} = 4 \left[ 1 + \frac{\vec{p}^2}{M_\pi^2} \right] \geq 4$$

---

für physikalische Impulse  $\vec{p}$ . Derselbe Ausdruck  $F(z)$  wird auch bei der Streuung von Pionen im elektromagnetischen Feld eines schweren Kernes erhalten. In diesem Fall ist

$$z = (p_1 - q_1)^2 = -\frac{2\vec{p}}{M_\pi^2}(1 - \cos\theta) < 0,$$

wobei  $\theta$  der Streuwinkel ist.

In dieser Arbeit geht es darum, Funktionen wie  $F(z)$  zu diskutieren und numerisch zu lösen. Es werden sich allerdings Probleme ergeben, wie oben, wenn beispielsweise das Argument des Logarithmus Null oder negativ wird. Um solche Fragen besser zu verstehen, werden die Funktionen für beliebige komplexe  $z$  diskutiert, obwohl  $z$  im physikalischen Fall eine reelle Zahl ist.

Es werden zwei Methoden zur numerischen Integration vorgestellt:  
Die  $\varepsilon$ -**Methode** basiert auf der Substitution

$$z \rightarrow z + i\varepsilon;$$

die Variable  $z$  wird also um einen kleinen Teil in die komplexe Ebene verschoben.

Die  $\lambda$ -**Methode** verschiebt den Integrationspfad des Feynman-Parameters in die komplexe Ebene. Es wird sich zeigen, dass diese Methode viel genauer ist.

In Kapitel 2 werden die mathematischen Hintergründe dieser Pfadverschiebungen diskutiert und die beiden Methoden genauer definiert. In Kapitel 3 werden die Methoden zur numerischen Lösung von Integralen angewandt. Ebenso sollen die Resultate vorgestellt und verglichen werden.

## 2 Mathematischer Hintergrund

Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse der komplexen Analysis (für eine kurze Zusammenfassung siehe Anhang A.1), sowie Kenntnisse über Singularitäten und analytische Fortsetzungen (siehe Anhang A.2).

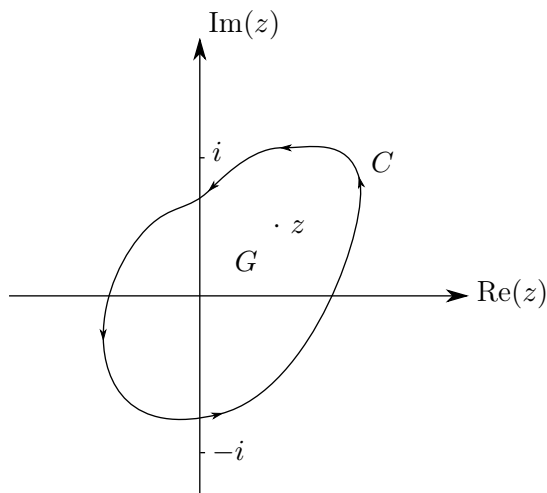
In diesem Kapitel werden Funktionen  $F(z)$  untersucht, die in einem bestimmten Gebiet eine Integraldarstellung besitzen. Dabei wird versucht, die holomorphen Eigenschaften von  $F(z)$  darzulegen ohne das Integral explizit zu lösen. In einem ersten Teil werden Cauchy-Integrale diskutiert, also Integrale, bei welchen der Integrationsweg geschlossen ist. In einem zweiten Teil werden Eigenschaften von allgemeinen Kurvenintegralen gezeigt. Hier kann der Integrationspfad beliebig verlaufen. Mit diesen Vorkenntnissen können drei Methoden besprochen werden: Die Darstellung der Funktion mittels einer Dispersionsrelation, die  $\varepsilon$ -Methode und die  $\lambda$ -Methode.

### 2.1 Cauchy-Integrale

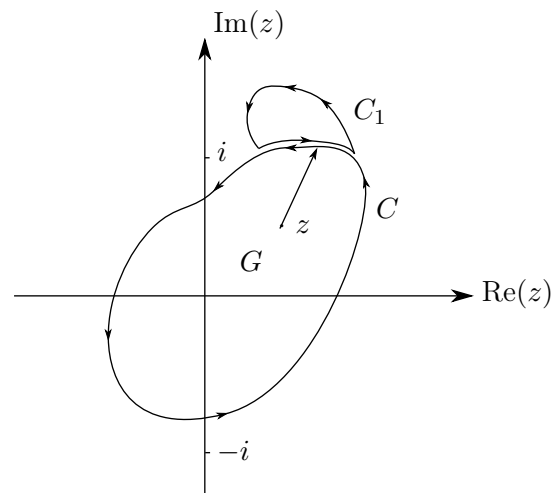
Die Funktion  $F(z)$  besitze beispielsweise innerhalb einer Kurve  $C$  (siehe Abb. 2) die Integraldarstellung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{du}{u - z} \frac{1}{u^2 + 1}. \quad (1)$$

Aus dem Satz von Cauchy wissen wir, dass  $F(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ , was wir allerdings nicht benutzen wollen; wir nehmen aber zur Kenntnis, dass  $F(z)$  einen einfachen Pol bei  $z = \pm i$  besitzt.



**ABBILDUNG 2:** Definitionsgebiet  $G$  der Funktion  $F(z)$  und Integrationskurve  $C$ .



**ABBILDUNG 3:** Erweiterung des Definitionsgebietes von  $F(z)$ .

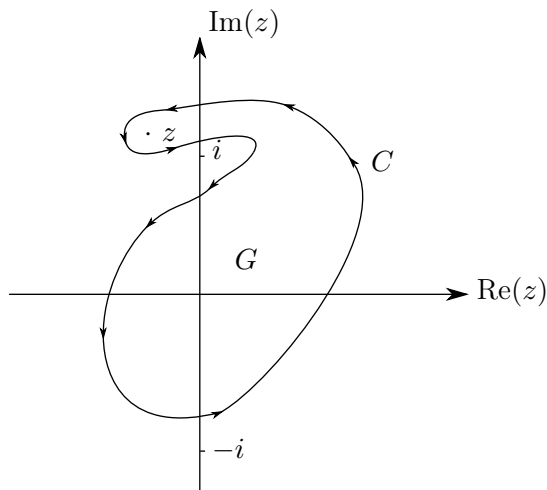
$F(z)$  ist also in einem Gebiet innerhalb der Kurve  $C$  definiert, welches ich mit  $G$  bezeichne. Es wird nun untersucht, was passiert, wenn  $z$  gegen den Rand dieses Definitionsgebiets läuft, wie zum Beispiel in Abb. 3.

Man sieht leicht, dass der Integrand aus (1) holomorph ist bis auf die Stellen  $u = z$  und  $u = \pm i$ , wo er singulär ist. Da der Weg  $C_1$  (siehe Abb. 3) keine Singularität überquert oder umrandet, ergibt das geschlossene Integral aus (1) über diesen Weg Null.  $F(z)$  kann also

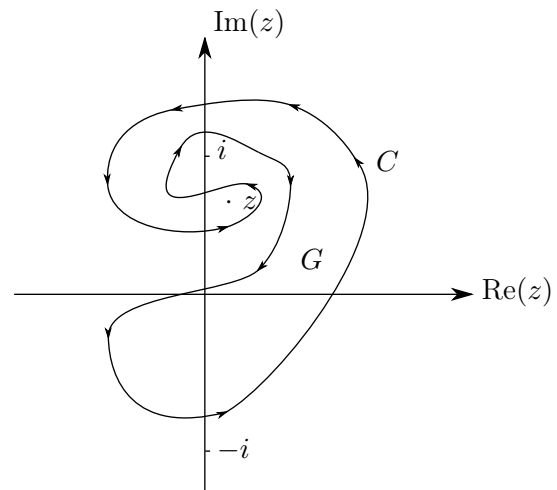
auch als das Integral über den Weg  $C \cup C_1$  dargestellt werden, wobei sich die berührenden Linienstücke  $C \cap C_1$  durch die umgekehrte Orientierung aufheben. Nun ist die Integrationslinie länger und somit das Gebiet  $G$  grösser, in welchem die Funktion  $F(z)$  definiert ist.

Läuft  $z$  gegen den Rand des Definitionsgebiets, so kann der Weg  $C$  genau so erweitert werden, dass  $z$  wieder innerhalb dieser Kurve liegt.

Läuft  $z$  allerdings gegen die Singularität  $z \rightarrow \pm i$ , so kann der Weg nicht einfach über die Singularität hinweggeschoben werden; der Pfad wird zwischen der Singularität  $u = z$  und  $u = \pm i$  gewissermassen eingeklemmt. Durch das Annähern von  $z$  zu  $\pm i$  divergiert der Integrand, wodurch eine Singularität entsteht.  $F(z)$  hat bei  $z = \pm i$  also eine "Pinch-Singularität".



**ABBILDUNG 4:** Verschiebung des Pfades für ein anderes  $z$ .

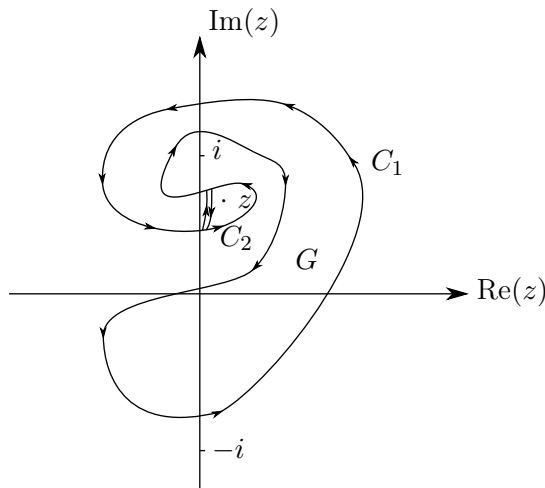


**ABBILDUNG 5:** Verschiebung wenn das  $z$  einmal um den Pol  $+i$  gewandert ist.

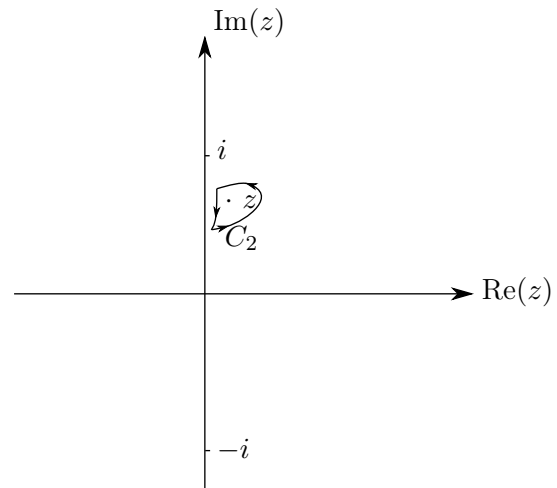
Befindet sich  $z$  noch weiter vom Integrationsgebiet entfernt, so kann der Weg gemäss Abb. 4 um den Punkt  $z = i$  herum verschoben werden. Somit können wir auch  $z$  einmal ganz um  $z = i$  laufen lassen, wodurch sich der Weg entsprechend Abb. 5 verschiebt. Dieser Weg kann in zwei Teile  $C_1$  und  $C_2$  aufgeteilt werden (Abb. 6), wobei der Beitrag aus  $C_1$  durch das Fehlen von Singularitäten verschwindet. Übrig bleibt also der Beitrag aus  $C_2$  (siehe Abb. 7), was der Darstellung aus (1) entspricht.

Das gleiche Verfahren kann auch für den Punkt  $z = -i$  angewandt werden. Man sieht also, dass  $F(z)$  sich nicht ändert, wenn die Funktion um den Punkt  $z = \pm i$  analytisch fortgesetzt wird; somit ist die Singularität bei  $z = \pm i$  ein Pol (weil die Singularität keine Wurzel- oder Logarithmus-Eigenschaften aufweist). Über die Ordnung dieses Pols kann nichts ausgesagt werden.

Dieses Beispiel zeigt, dass Informationen über die singulären Stellen der Funktion  $F(z)$  durch Verschieben des Integrationspfades gewonnen werden können.



**ABBILDUNG 6:** Aufteilung des Integrationspfades in zwei Teile  $C_1$  und  $C_2$ .



**ABBILDUNG 7:** Das Integral über den den Weg  $C_1$  verschwindet.

## 2.2 Integration über Kurvenstücke

Die Funktion  $G(z)$  besitze beispielsweise die Integraldarstellung

$$G(z) = \int_{-1}^1 \frac{du}{u^2 + z}. \quad (2)$$

Im Unterschied zum vorherigen Abschnitt besitzt der Integrationsweg hier einen fixen Anfangspunkt  $u = -1$  und einen fixen Endpunkt  $u = 1$ . Durch diese Einschränkung kann der Pfad nicht mehr beliebig verschoben werden.

Singuläre Stellen des Integranden treten auf, wenn der Nenner Null werden kann. Da  $u$  zwischen  $-1$  und  $1$  läuft, können diese Singularitäten nur für  $z \in [-1, 0]$  auftreten.  $G(z)$  ist also holomorph in  $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$  und hat zwei Singularitäten bei  $z = -1$  und bei  $z = 0$ .

Die Singularitäten von  $G(z)$  sehen wie folgt aus:

$$G(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{z}} + h_1(z), & z \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-z}} \ln(-1 - \sqrt{-z}) + h_2(z) & z \rightarrow -1 \end{cases}$$

Dabei ist  $h_1$  eine holomorphe Funktion in der Umgebung von  $z = 0$  und  $h_2$  eine holomorphe Funktion in der Umgebung von  $z = -1$ . Wir haben also eine Wurzelsingularität bei  $z = 0$  und eine logarithmische Singularität bei  $z = -1$ .

**Grund:** (Im eingerückten Text folgt die Herleitung der Art der Singularitäten)

Durch Partialbruchzerlegung des Integranden von (2) erhält man

$$G(z) = \frac{\pi}{\sqrt{z}} + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{z}} \{ \ln(1 + i\sqrt{z}) - \ln(1 - i\sqrt{z}) \}}_{h(\sqrt{z})}.$$

Der zweite Term  $h(\sqrt{z})$  ist eine gerade Funktion in  $\sqrt{z}$ :

$$h(-\sqrt{z}) = h(\sqrt{z}) \implies h(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sqrt{z})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = h_1(z)$$

$h_1(z)$  ist also holomorph in  $z = 0$ , somit hat  $G(z) = \frac{\pi}{\sqrt{z}} + h_1(z)$  in  $z = 0$  eine Wurzelsingularität.

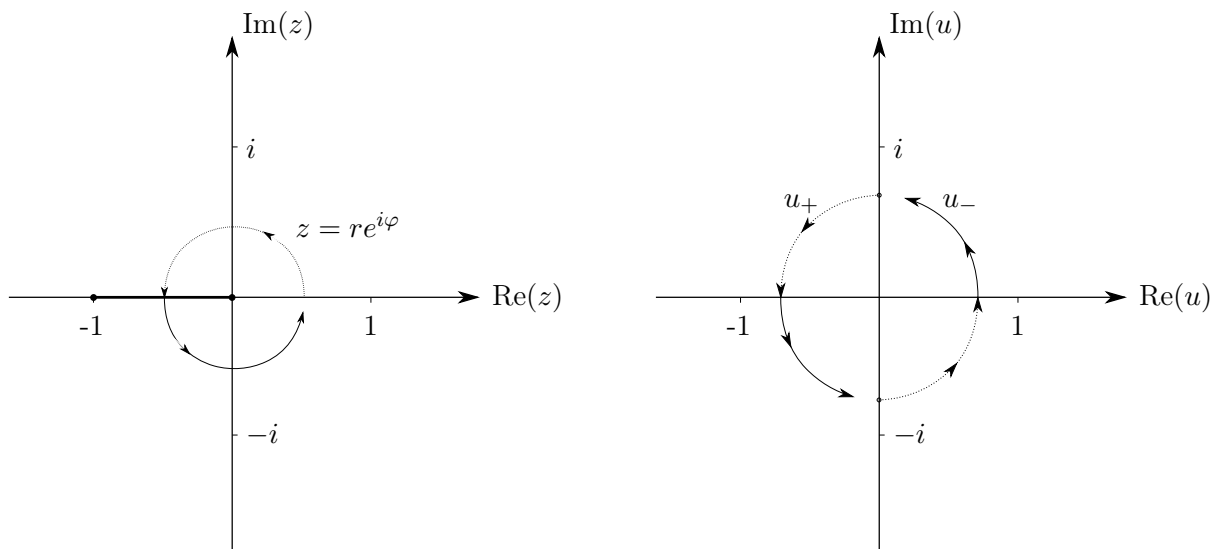
Um den Punkt  $z = -1$  zu untersuchen, wird  $z$  durch die obere Halbebene von  $\mathbb{C}$  bis in die Nähe des Punktes  $z = -1$  bewegt. Dadurch wird  $\sqrt{z}$  zu  $i\sqrt{-z}$  und  $G(z)$  wird dadurch zu:

$$G(z) = \underbrace{\frac{\pi}{i\sqrt{-z}} + -\frac{1}{\sqrt{-z}} \ln(1 + \sqrt{-z})}_{h_2(z)} + \frac{1}{\sqrt{-z}} \ln(1 - \sqrt{-z})$$

Für  $z \rightarrow -1$  ist  $h_2(z)$  holomorph und der zweite Teil wird zu einer logarithmischen Singularität.

Nun wird versucht, die Art dieser Singularitäten zu bestimmen, ohne das Integral zu lösen. Dazu überlegt man sich, was passiert, wenn die Funktion  $F(z)$  entlang eines Kreises um die singuläre Stelle analytisch fortgesetzt wird. Um dies zu erreichen, muss der Integrationspfad verschoben werden, sobald sich  $z$  dem Schnitt  $(-1, 0)$  nähert, weil sich dann die singulären Stellen des Integranden ( $u_{\pm} = \pm i\sqrt{z}$ ) dem Integrationspfad nähern.

Bewegt sich  $z$  im Gegenuhrzeigersinn entlang eines Kreises um den Nullpunkt, so bewegen sich die singulären Stellen des Integranden  $u_{\pm}$  entsprechend der Abbildung 8.

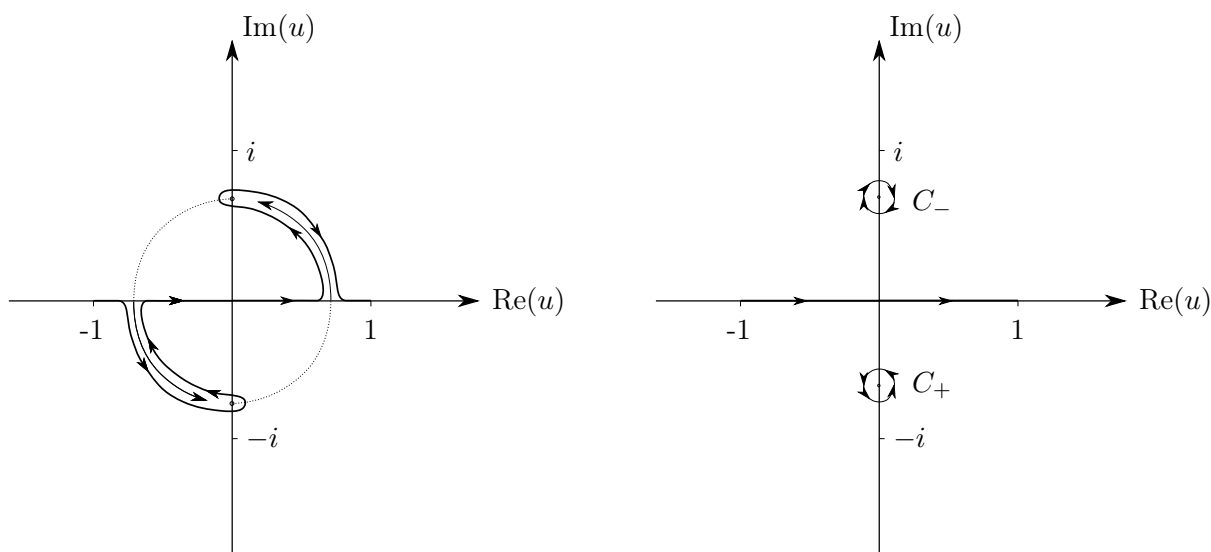


**ABBILDUNG 8:** Links ist die komplexe  $z$ -Ebene Abgebildet. Der Schnitt  $z \in [-1, 0]$  und die Singularitäten  $z = -1$  und  $z = 0$  sind hervorgehoben.  $z$  läuft entlang eines Kreises um den Nullpunkt. Rechts sind die singulären Stellen des Integranden  $u_{\pm} = \pm i\sqrt{z}$  eingetragen, diese vertauschen ihre Plätze, wenn  $z$  um den Nullpunkt läuft.

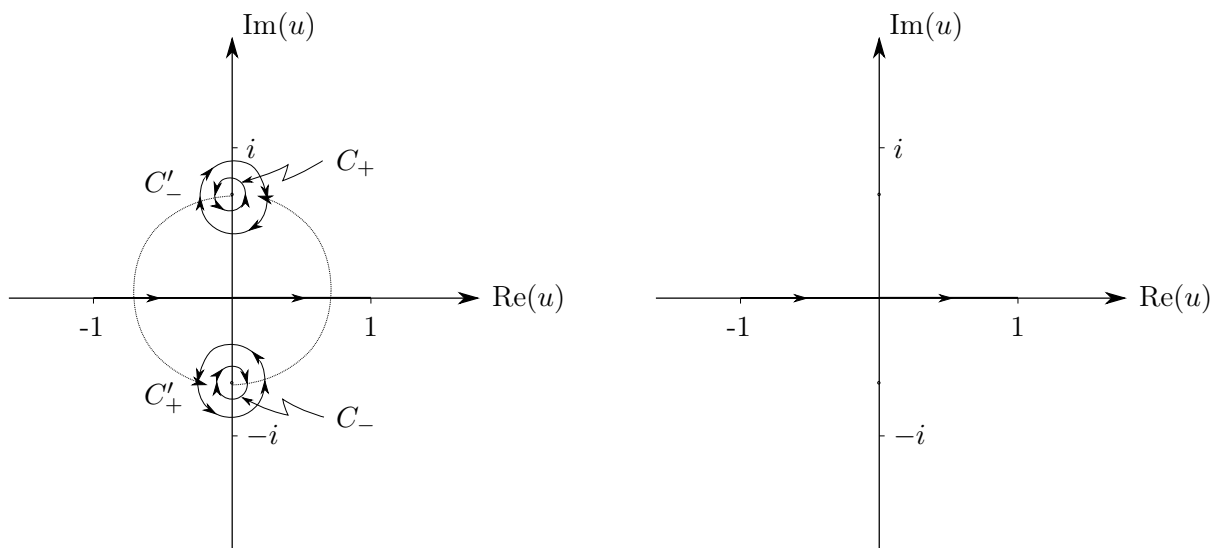
Nun wird der Pfad wie in Abb. 9 verschoben. Dieser Pfad kann anschliessend zu einem Integrationspfad entlang des ursprünglichen Weges  $u \in [-1, 1]$  und zwei Kreisintegralen ( $C_+$  und  $C_-$ ) um die singulären Stellen des Integranden  $u_{\pm}$  vereinfacht werden.

Die beiden Beiträge des Integrals entlang  $C_-$  und  $C_+$  betragen jeweils

$$C_{\pm} \int_{-1}^1 \frac{du}{u + i\sqrt{z}} \frac{1}{u - i\sqrt{z}} = -\frac{\pi}{\sqrt{z}}.$$



**ABBILDUNG 9:** Wird die Funktion  $G(z)$  analytisch fortgesetzt, so muss der Integrationspfad verschoben werden (links). Dieser Pfad kann ähnlich zu Abb. 6 und Abb. 7 vereinfacht werden (rechts).



**ABBILDUNG 10:** Lläuft  $z$  ein zweites mal um den Ursprung, so tauschen  $C_-$  und  $C_+$  ihre Position und durch das Verschieben des Pfades  $u \in [-1, 1]$  entstehen zwei neue Kreisintegrale  $C'_-$  und  $C'_+$  (links). Die Kreisintegrale heben sich durch die gegensätzliche Orientierung gegenseitig auf; übrig bleibt der ursprüngliche Integrationspfad von  $u = -1$  bis  $u = 1$  (rechts).

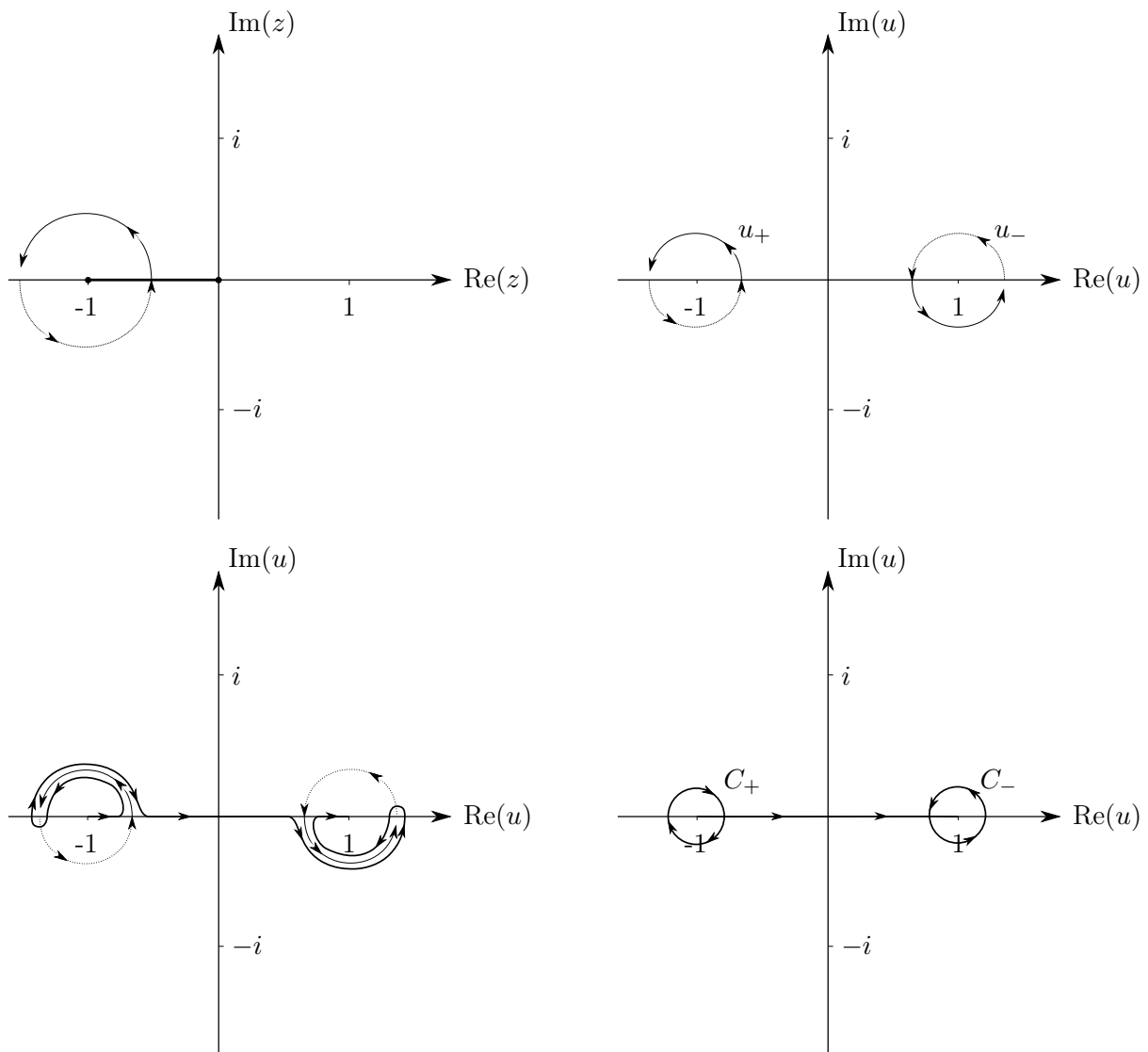
Wird die Funktion  $G(z)$  entlang eines im Gegenuhrzeigersinn orientierten Kreises um den Nullpunkt analytisch fortgesetzt, so ergibt sich die Funktion  $\tilde{G}(z) = G(z) - \frac{2\pi}{\sqrt{z}}$ .

Bewegt sich  $z$  ein zweites mal um den Nullpunkt, so vertauschen die beiden Kreise  $C_+$  und  $C_-$  ihre Position und durch das Verschieben des Pfades  $u \in [-1, 1]$  entstehen wie oben zwei neue Kreise  $C'_+$ ,  $C'_-$  (siehe Abb. 10). Durch die entgegengesetzte Orientierung heben sich jeweils  $C_+$  und  $C'_-$  sowie  $C_-$  und  $C'_+$  weg; übrig bleibt das ursprüngliche Integral entlang des Pfades  $u \in [-1, 1]$ .

Setzt man die Funktion  $G(z)$  analytisch fort, indem sich  $z$  zweimal um den Nullpunkt

bewegt, so erhält man wieder die ursprüngliche Funktion  $G(z)$ . Der Nullpunkt ist also eine Quadratwurzelsingularität.

Bewegt sich  $z$  gegen den Nullpunkt, so nähern sich auch die singulären Stellen des Integranden dem Nullpunkt, jedoch aus verschiedenen Richtungen. Dadurch wird der Pfad eingeklemmt, so dass er nicht mehr verschoben werden kann und es entsteht eine Pinch-Singularität von  $G(z)$  bei  $z = 0$ .



**ABBILDUNG 11:** Lläuft  $z$  um die Singularität  $z = -1$  (oben, links), so verschieben sich die singulären Stellen des Integranden entsprechend dem Bild oben rechts. Bei der analytischen Fortsetzung der Funktion muss der Pfad entsprechend verschoben werden (unten, links). Die Vereinfachung des Integrationspfades auf den ursprünglichen Pfad und zwei Kreisintegrale  $C_+$ ,  $C_-$  um die singulären Stellen des Integranden ist unten rechts dargestellt.

Umrundet man beim analytischen Fortsetzen den Punkt  $z = -1$ , so verschieben sich die singulären Stellen des Integranden  $u_{\pm}$  entsprechend Abb. 11. Der neue Integrationspfad kann ähnlich wie vorhin zum ursprünglichen Integrationspfad und zwei Kreisintegralen  $C_+$  und  $C_-$

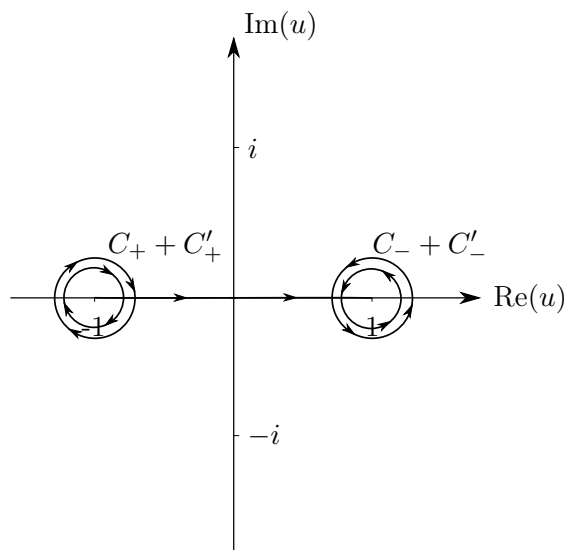
vereinfacht werden.

Die Beiträge von  $C_+$  und  $C_-$  sind

$$C_{\pm} \int \frac{du}{u + i\sqrt{z}} \frac{1}{u - i\sqrt{z}} = -\frac{\pi}{\sqrt{z}}.$$

Wird die Funktion  $G(z)$  entlang eines im Gegenuhrzeigersinn orientierten Kreises um den Punkt  $z = -1$  analytisch fortgesetzt, so ergibt sich die Funktion  $\tilde{G}(z) = G(z) - \frac{2\pi}{\sqrt{z}}$ .

Beim erneuten Umrunden von  $z = -1$  werden die Kreisintegrale  $C_+$ ,  $C_-$  ihre Positionen nicht vertauschen, sondern sie bleiben am selben Ort und heben sich dadurch nicht mit den durch die Verschiebung des Pfades hervorgerufenen neuen Kreisintegralen  $C'_+$ ,  $C'_-$  auf (siehe Abb. 12).



**ABBILDUNG 12:** Lläuft  $z$  ein zweites mal um den Ursprung, so ergeben sich zwei zusätzliche neue Kreisintegrale  $C'_+$  und  $C'_-$ .

Bei jeder Umrundung von  $z = -1$  kommt somit ein zusätzlicher Faktor dazu, die Funktion sieht nach  $n$  Umrundungen wie folgt aus:

$$G^{(n)}(z) = G(z) + n \frac{2\pi}{\sqrt{z}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei im Uhrzeigersinn orientierte Umrundungen als negativ gezählt werden. Diese Eigenschaft zeigt, dass die Singularität logarithmisch ist.

Lläuft  $z$  gegen  $-1$ , so nähern sich die singulären Stellen des Integranden den Endpunkten des Integrationspfades.  $G(z)$  hat also eine Endpunktsingularität bei  $z = -1$ .

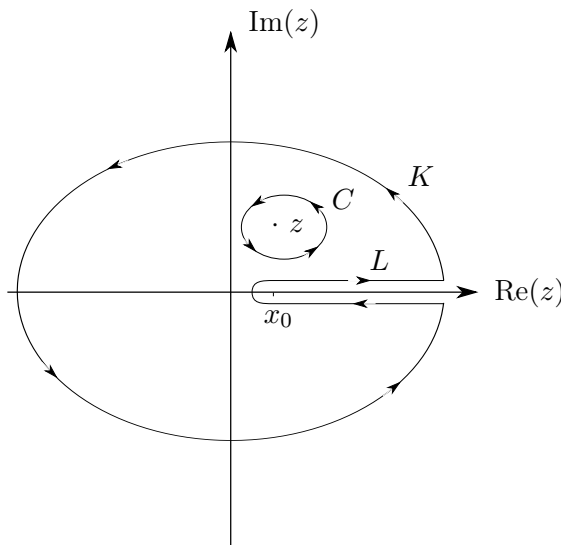
## 2.3 Dispersionsrelation

Bei der Methode der Dispersionsrelation kann ein Integral umgeschrieben werden, so dass die Singularitäten direkt erkennbar sind.

Sei  $F(z)$  eine auf  $\mathbb{C} \setminus [x_0, \infty)$  holomorphe Funktion, so kann  $F(z)$  durch ein Cauchy-Integral dargestellt werden:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

wobei  $C$  ein im Gegenuhrzeigersinn orientierter geschlossener Pfad um den Punkt  $z$  ist (siehe Abb. 13).



**ABBILDUNG 13:** Anfänglicher Integrationspfad  $C$  des Cauchy-Integrals, der aufgeteilt werden kann in ein Integral über  $K$  und eines über  $L$ .

Weil der Integrand keine weiteren Singularitäten, ausser  $\xi = z$  und jene von  $F(\xi)$  aufweist, kann der Integrationspfad  $C$  verschoben werden, so dass über einen Kreis  $K$ , dessen Radius gegen unendlich geht und einen Pfad  $L$  um den Schnitt von  $x_0$  bis ins Unendliche integriert wird (siehe Abb. 13).

Nun wird die Diskontinuität  $\Delta F(x)$  definiert ist als

$$\Delta F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{F(x + i\varepsilon) - F(x - i\varepsilon)\},$$

so dass das Integral über  $L$  geschrieben werden kann als:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0} \frac{F(x - i\varepsilon)}{x - z} dx + \int_{x_0}^{\infty} \frac{F(x + i\varepsilon)}{x - z} dx \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Delta F(x)}{x - z} dx,$$

vorausgesetzt, dass die Diskontinuität im Unendlichen verschwindet, so dass sie integrierbar wird.

Es gibt zwei mögliche Fälle:

**Fall 1:**

Sowohl die Diskontinuität, als auch das Integral über  $K$  verschwinden im Unendlichen, so dass  $F(z)$  dargestellt werden kann als

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Delta F(x)}{x-z} dx.$$

**Fall 2:**

Wenn die Diskontinuität oder/und das Integral über  $K$  im Unendlichen nicht verschwinden, so wird eine neue Funktion  $J(z)$  eingeführt als

$$J(z) = \frac{F(z) - F(0)}{z}.$$

$J(z)$  ist holomorph in  $z = 0$ . Grund:  $J(0) = F'(0)$  und  $F(z)$  ist holomorph in  $z = 0$ .

Nun wird  $J(z)$  genau gleich dargestellt wie oben, was dazu führt, dass  $\Delta J(x) = \frac{\Delta F(x)}{x}$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass die Diskontinuität nun im Unendlichen verschwindet ist also grösser. Es gibt auch hier die zwei Fälle:

**Fall 2a:**

Sowohl die Diskontinuität  $\Delta J(x)$ , wie auch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{J(\xi)}{\xi-z} d\xi$$

über den Kreis  $K$  verschwinden im Unendlichen, dann lässt sich  $J$  schreiben als:

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Delta J(x)}{x-z} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{\Delta F(x)}{x-z} dx.$$

Somit lässt sich  $F(z)$  darstellen als

$$F(z) = F(0) + \frac{z}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx \Delta F(x)}{x(x-z)}.$$

**Fall 2b:**

Geht die Diskontinuität oder das Integral über  $K$  im Unendlichen immer noch nicht gegen Null, so kann dieses Verfahren beliebig oft wiederholt werden. Als nächstes kann eine Funktion  $M(z) = \frac{J(z)-J(0)}{z}$  definiert werden. Falls bei dieser die Diskontinuität und das Integral über  $K$  im Unendlichen gegen Null gehen, so kann analog zu oben gezeigt werden, dass  $F(z)$  geschrieben werden kann als

$$F(z) = F(0) + zF'(0) + \frac{z^2}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx \Delta F(x)}{x^2(x-z)}.$$

Aus dieser Darstellung sieht man sofort, dass sich eine singuläre Stelle von  $F(z)$  bei  $z = x_0$  befindet und das Definitionsgebiet von  $F(z)$  einen Schnitt von  $x_0$  entlang der reellen Achse bis ins Unendliche aufweist.

## 2.4 Die $\varepsilon$ -Methode

### Hintergrund:

In der Quantenfeldtheorie trifft man auf Integrale der Form

$$F(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 (g(x, z) - i\varepsilon)^\alpha dx; \quad \alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Im Folgenden wird die Funktion  $g(x, z) = 1 - zx(1 - x)$  betrachtet.

Lässt man  $\varepsilon$  direkt gegen Null gehen, so divergiert der Integrand dieser Funktion im Allgemeinen genau dort, wo  $g(x, z)$  Null wird (und/oder ist nicht definiert für  $g < 0$ ). Abbildung 14 zeigt den Verlauf von  $g(x, z)$  für verschiedene  $z$ , wenn die Integrationsvariable  $x$  von 0 bis 1 läuft.

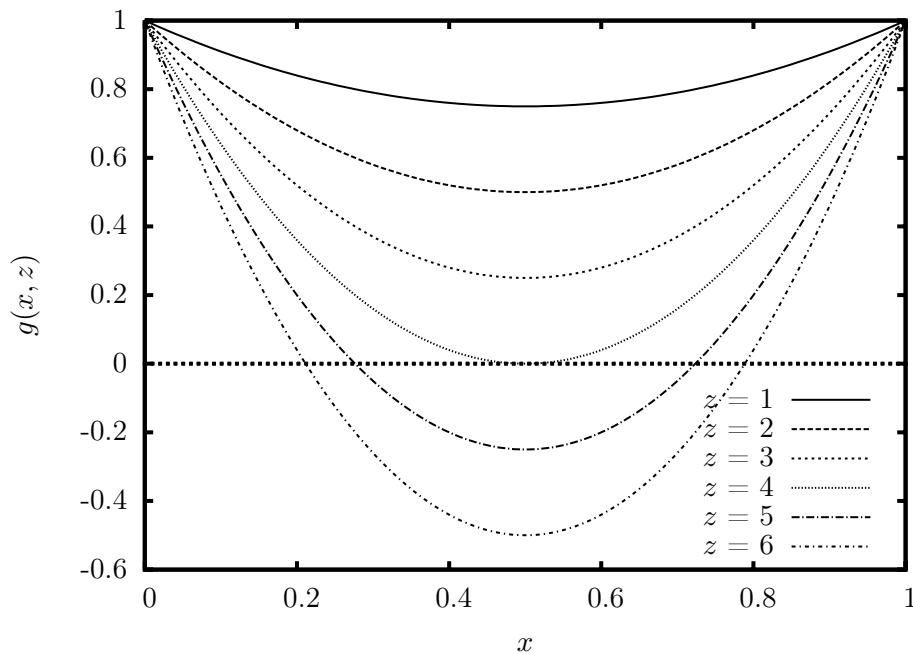


ABBILDUNG 14: Kritischer Teil des Integranden

Es ist zu erkennen, dass  $g(x, z)$  Null werden kann, falls  $z$  reell und grösser als 4 ist. Bei  $z = 4$  besitzt  $g(x, z)$  sogar eine doppelte Nullstelle. Würde  $z$  einen Imaginärteil verschieden von Null besitzen, so würde  $g(x, z)$  nie exakt Null werden.

### Idee:

Die Idee der  $\varepsilon$ -Methode besteht nun darin,  $z$  ins Komplexe zu verschieben, also folgende Substitution durchzuführen:

$$z \rightarrow z + i\varepsilon$$

Dadurch will man erreichen, dass  $g(x, z + i\varepsilon)$  selbst einen kleinen negativen Imaginärteil erhält und man dadurch den Term  $-i\varepsilon$  in Gleichung (3) weglassen kann ohne dass sich die Funktion  $F(z)$  nach der Integration verändert.

**Voraussetzung:**

Entwickelt man  $g(x, z + i\varepsilon)$ , so erhält man:

$$g(x, z + i\varepsilon) = \underbrace{g(x, z)}_{\in \mathbb{R}} + i\varepsilon \frac{\partial g}{\partial z} - \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\mathcal{O}(\varepsilon^3)}_{\text{klein}}$$

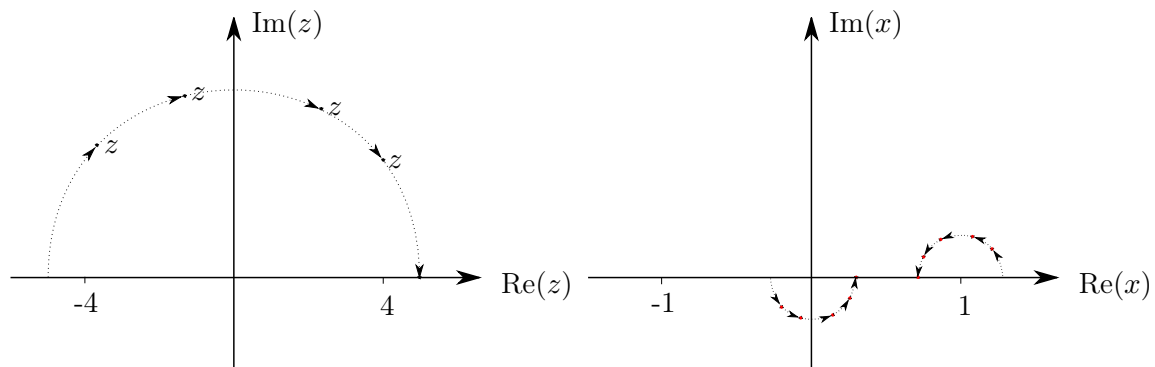
Es ist ersichtlich, dass  $g(x, z + i\varepsilon)$  einen kleinen Imaginärteil erhält. Der Imaginärteil von  $g(x, z + i\varepsilon)$  wird allerdings nur dann negativ, wenn  $\frac{\partial g}{\partial z} < 0 \quad \forall z, \forall x \in [0, 1]$ .

Die Voraussetzung  $\frac{\partial g}{\partial z} < 0$  muss also erfüllt sein, um die  $\varepsilon$ -Methode anwenden zu dürfen.

In unserem Beispiel ist  $\frac{\partial g}{\partial z} = -x(1-x) < 0$  für  $x \in [0, 1]$ , ausser bei  $x = 0$  oder  $x = 1$ . Jedoch sind diese Punkte ohnehin unproblematisch, da dort keine singuläre Stelle des Integranden zu liegen kommt.

**Konsequenz:**

Um die Auswirkungen der  $\varepsilon$ -Methode auf die Singularitäten des Integranden etwas anschaulicher machen zu können, sind nachfolgend die Nullstellen von  $g(x, z)$  in einer Grafik eingetragen. Dabei wandert  $z$  in einem konstanten Abstand um den Ursprung bis nach  $5 + i\varepsilon$ , wodurch sich die Nullstellen von  $g(x, z)$  dem Intervall  $[0, 1]$  nähern.



**ABBILDUNG 15:** Links: Verschiebung von  $z$ . Rechts: Rot eingezeichnet sind die Nullstellen von  $g(x, z)$ , also die singulären Stellen des Integranden.

Besitzt also  $z$  einen kleinen positiven Imaginärteil (wie in Abb. 15), so verschiebt sich die erste Singularität ein wenig gegen unten (negativer Imaginärteil) und die zweite Singularität ein wenig nach oben. Der Integrationspfad verläuft also oberhalb der ersten Singularität und unterhalb der zweiten Singularität hindurch. Im Grenzfalle  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  liegen die Singularitäten direkt auf dem Intervall  $[0, 1]$ .

Für weitere Beispiele habe ich ein Programm geschrieben, das die Nullstellen darstellen kann (siehe Abb. 16). Dabei müssen die Nullstellen der konkreten Funktion  $g(x, z)$  eingegeben werden. Nach der Kompilierung öffnet sich ein Fenster, in dem im linken Quadrat mit der Maus ein Punkt  $z$  angeklickt werden kann. Zu diesem Punkt werden dann im rechten Quadrat die Nullstellen ausgegeben.

Das Problem dieser Methode besteht darin, dass  $\varepsilon$  so klein wie möglich gewählt werden muss; andernfalls befinden sich die Singularitäten zu weit vom Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  entfernt, was nicht zum

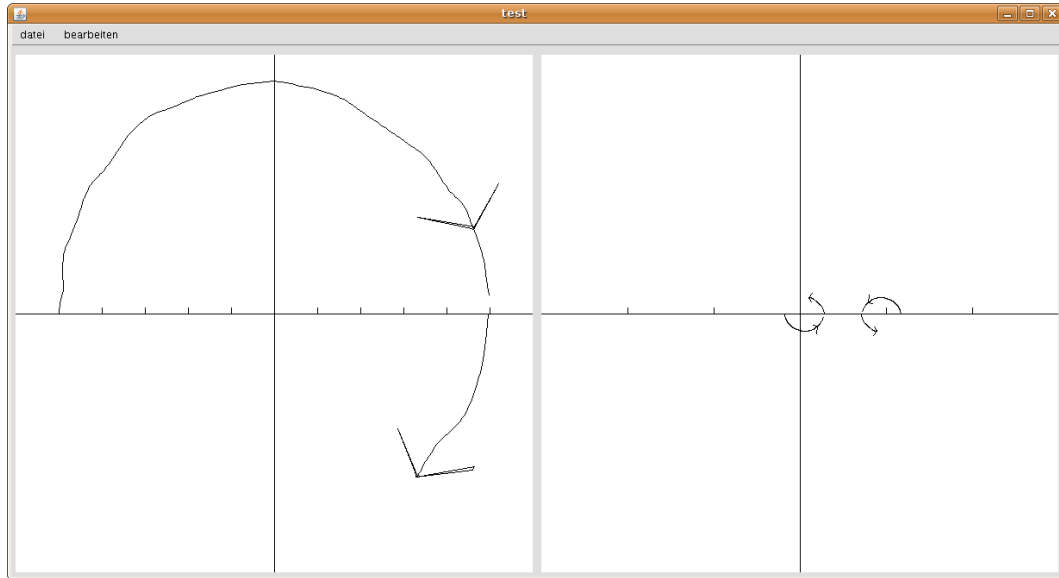


ABBILDUNG 16: Programm zum Darstellen der Position der Singularitäten

richtigen Resultat führt. Andererseits besteht das Problem, dass für kleine  $\varepsilon$  der Integrand sehr grosse Werte annehmen kann, da der Integrationspfad nahe an den Singularitäten vorbeiführt. Zu grosse Werte des Integranden führen zu einem deutlich höheren Rechenaufwand beim numerischen Integrieren und verhindern unter Umständen, dass die gewünschte Genauigkeit innerhalb einer vernünftigen Zeit erreicht werden kann.

Bei dieser Methode muss also immer abgewogen werden, wie gross  $\varepsilon$  im jeweiligen Beispiel gewählt werden kann, um einerseits eine gewünschte Genauigkeit zu erreichen und andererseits den Rechenaufwand in Grenzen zu halten.

Kann  $\varepsilon$  nicht klein genug gewählt werden, so besteht die Möglichkeit, das exakte Resultat zu interpolieren. Dies erreicht man, indem man die Berechnung für verschiedene  $\varepsilon$  durchführt. Danach legt man beispielsweise ein Polynom  $p(\varepsilon, z)$  durch die Resultate und wertet das Polynom an der Stelle  $\varepsilon = 0$  aus. Dieses Vorgehen ist allerdings unpraktisch, da eine solche Interpolation für jedes einzelne  $z$  im gewünschten Intervall durchgeführt werden müsste.

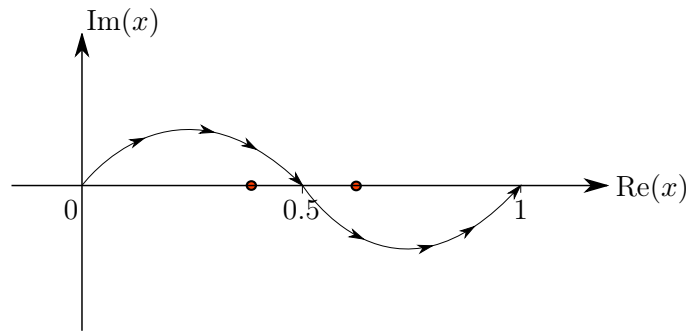
## 2.5 Die $\lambda$ -Methode

### Hintergrund:

Die Integrale sind von der gleichen Form wie jene, welche mit der  $\varepsilon$ -Methode behandelt werden.

### Idee:

Der Grenzübergang  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  wird bereits am Anfang ausgeführt. Somit befinden sich die Singularitäten direkt auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Um zu vermeiden, dass der Integrand über diese Singularitäten läuft, kann auch der Integrationspfad in der komplexen Ebene verschoben werden. Solange der Weg nicht über weitere



**ABBILDUNG 17:** Verschiebung des Pfades bei der  $\lambda$ -Methode. Die grossen roten Punkte stellen die singulären Stellen des Integranden dar.

Singularitäten hinweggeschoben wird, bleibt das Resultat des Integrals dasselbe. Statt  $z$  mit einem kleinen Imaginärteil zu versetzen, wodurch sich die Singularitäten wie in Abb. 15 von der reellen Achse wegbewegen, wird also ein anderer Integrationsweg gewählt, so dass die Singularitäten auf der gleichen Seite wie vorhin durchlaufen werden. Der Integrationspfad in unserem Beispiel wird wieder oberhalb der ersten und unterhalb der zweiten Singularität durchgelegt. Der Verlauf des Integrationsweges, welcher immer noch von 0 bis 1 führt, ist in Abb. 17 zu erkennen. Der neue Weg wird durch folgende Substitution beschrieben:

$$x \longrightarrow y = x - i\lambda x(1-x) \frac{\partial g}{\partial x}$$

### Voraussetzung:

Das Ziel ist es, die Parametrisierung wieder so zu gestalten, dass man einen kleinen negativen Imaginärteil im Integranden der Gleichung (3) erhält. Um dies zu untersuchen, wird  $g(y, z)$  in einer Taylor-Reihe entwickelt:

$$g(y, z) = \underbrace{g(x, z)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{i\lambda x(1-x)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\frac{\lambda^2}{2} x^2(1-x)^2}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial g}{\partial x}\right)}_{\text{klein}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (4)$$

Für genügend kleine  $\lambda$  können die Terme der Ordnung  $\lambda^3$  vernachlässigt werden.

Um einen negativen Imaginärteil zu erhalten muss also die Voraussetzung  $\frac{\partial g}{\partial x} \neq 0$  erfüllt sein, was gleichbedeutend damit ist, dass die Nullstelle eine einfache sein muss.

In unserem Beispiel beträgt  $\frac{\partial g}{\partial x} = z(2x-1)$ . Die Voraussetzung ist also in allen Punkten erfüllt, ausser bei  $x = \frac{1}{2}$ , wo sich für  $z = 4$  eine doppelte Nullstelle befindet.

**Konsequenz:**

Der Vorteil dieser Methode gegenüber der  $\varepsilon$ -Methode liegt darin, dass der Integrationsweg einen grösseren Abstand zur Singularität hat, wodurch der Betrag des Integranden kleiner wird. Dadurch können Rechenprobleme, wie sie bei der  $\varepsilon$ -Methode auftreten, vermindert werden. Die grosse Stärke der Methode liegt vor allem darin, dass das Resultat im Prinzip unabhängig von  $\lambda$  ist, was bedeutet, dass man immer die exakte Lösung erhält. Es gibt allerdings einige **Einschränkungen bei der  $\lambda$ -Methode**:

1. Es ist möglich, dass der Pfad bei der Substitution so weit verschoben wird, dass er über weitere Singularitäten hinweggeschoben wird.
2. Für grosse  $\lambda$  können die Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  aus Gleichung (4) ins Gewicht fallen und bewirken, dass man einen positiven Imaginärteil im Integranden erhält, wodurch der Integrationspfad auf der “falschen” Seite der Singularitäten liegen würde.
3. Es können doppelte Nullstellen auftreten, sodass der Pfad an diesem Ort nicht verschoben werden kann und folglich direkt über die Singularität integriert wird.

Falls die Singularitäten isoliert sind, wird die Einschränkung unter Punkt 1 durch Berechnung der Position sämtlicher Nullstellen und der Wahl eines geeignet kleinen  $\lambda$  hinfällig.

Auch die Schwierigkeit unter Punkt 2 kann durch genügend kleine  $\lambda$  behoben werden. Bei der numerischen Integration kann eine `if`-Abfrage eingebaut werden, welche überprüft dass  $g(x, z)$  immer einen kleinen negativen Imaginärteil enthält und das Programm andernfalls mit einem Fehler abbricht.

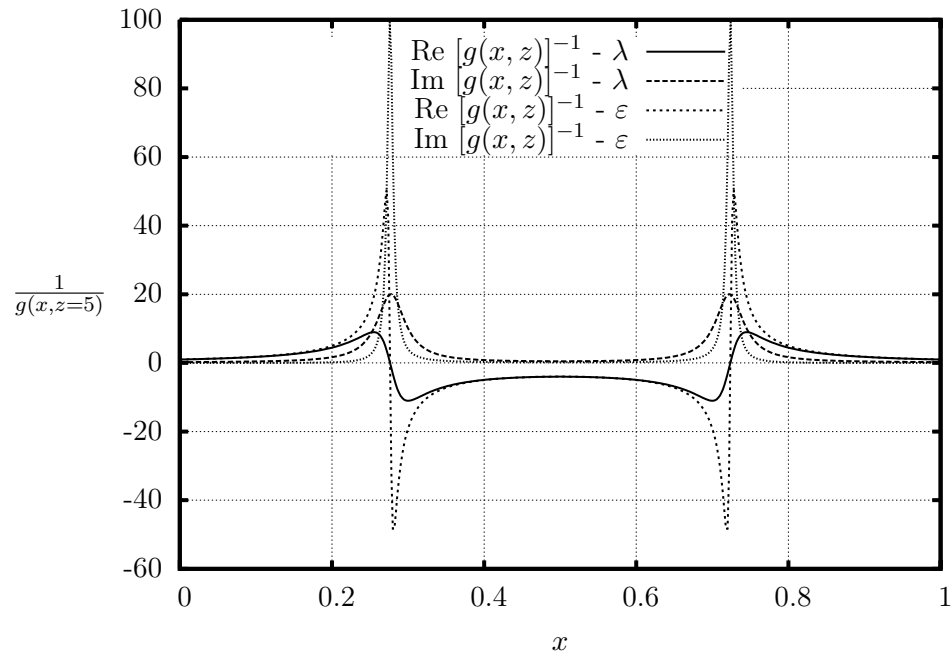
Die wirklich einschneidende Einschränkung besteht in Punkt 3. Hat man einen Integranden mit der Eigenschaft, dass  $g(x, z) = 0$  und  $\frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = 0$  für ein bestimmtes  $z = z_0$ , so müssen die analytischen Eigenschaften dieser Stelle näher untersucht werden. Numerisch gibt es folgende Möglichkeiten, trotzdem zu einem Resultat zu gelangen (allerdings ist die Korrektheit nicht garantiert):

- Die Integrationsroutine soll viel mehr Rechenschritte benutzen, danach kann versucht werden, ob es trotzdem möglich ist, das Integral numerisch zu berechnen.
- Man berechnet das Integral in einer Umgebung der kritischen Stelle (also für  $z$  in der Nähe von  $z_0$ ) und interpoliert die Rechnung am Schluss (für  $z \rightarrow z_0$ ).
- Man benutzt die  $\varepsilon$ -Methode und interpoliert ggf. die Resultate für  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Unter Beachtung dieser drei Einschränkungen kann  $\lambda$  beliebig gewählt werden, denn dann hängt das Ergebnis nicht von  $\lambda$  ab. Wie bereits erwähnt liegt der grosse Vorteil dieser Methode darin, dass das Ergebnis in jedem Fall exakt ist, im Gegensatz zur  $\varepsilon$ -Methode, wo man das exakte Resultat nur erahnen kann, beispielsweise durch eine Interpolation für immer kleinere  $\varepsilon$ .

Diese Tatsache kann ausgenützt werden um  $\lambda$  so gross zu wählen, dass der Integrationspfad weit weg von den Singularitäten verläuft. Dadurch wird der Betrag des Integranden nicht mehr extrem gross, was zu einem viel geringeren Rechenaufwand bei der numerischen Integration führt. In Abb. 18 ist diese Tatsache graphisch dargestellt. Dabei sind der Real- und Imaginärteil des Integranden  $[g(x, z)]^{-n} = [1 - zx(1 - x)]^{-n}$  mit  $z = 5$  und  $n = 1$  eingetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Werte bei der  $\varepsilon$ -Methode viel grösser werden. Es ist allerdings

aber noch zu beachten, dass  $\lambda$  genau gleich gross gewählt wurde wie  $\varepsilon$ ; dabei könnte man ohne Genauigkeitsverluste  $\lambda$  auch viel grösser wählen, wodurch die Werte der Integranden erheblich kleiner würden.



**ABBILDUNG 18:** Werte der Integranden bei der  $\lambda$ -Methode mit  $\lambda = 0.05$  und bei der  $\varepsilon$ -Methode mit  $\varepsilon = 0.05$ . Sowohl der Real-, als auch der Imaginärteil des Integranden werden bei der  $\lambda$ -Methode erheblich kleiner.

### 3 Anwendung: Feynmanamplituden

#### 3.1 Einschleifenintegrale

##### 3.1.1 Diskussion

Als erstes Beispiel wird die bereits erwähnte Funktion  $F(z)$  diskutiert:

$$F(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 [g(x, z) - i\varepsilon]^\alpha dx; \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5)$$

mit  $g(x, z) = 1 - zx(1 - x)$ .

Damit später die Genauigkeiten der Resultate beurteilt werden können, wird hier exemplarisch die Stammfunktion des folgenden Integrals angegeben:

$$F(z) = \int_0^1 \ln(1 - zx(1 - x)) dx \quad (6)$$

Durch Faktorisieren von  $g(x, z)$  lässt sich das Integral lösen und man erhält

$$F(z) = W \ln \left( \frac{W+1}{W-1} \right) - 2, \quad \text{mit } W = \sqrt{1 - \frac{4}{z}}. \quad (7)$$

Um Schwierigkeiten mit negativen Logarithmen zu vermeiden, müssen bei der Berechnung die drei Fälle  $z < 0$ ,  $z \in (0, 4)$ ,  $z \geq 4$  einzeln behandelt werden. Das Definitionsgebiet der Funktion  $F(z)$  hat einen Schnitt bei  $z \in [4, \infty]$ . Grund: nach meiner Konvention aus Anhang A.2 geht der Imaginärteil des Logarithmus für  $z$  mit  $\text{Re}(z) > 4$  und einem sehr kleinen positiven Imaginärteil gegen  $+\pi$  und entsprechend für  $z$  mit einem sehr kleinen negativen Imaginärteil gegen  $-\pi$ , wodurch eine Unstetigkeitsstelle bei der reellen Achse entsteht.

Nun soll das Integral numerisch berechnet werden; dazu bedienen wir uns der bereits vorgestellten  $\varepsilon$ -Methode und der  $\lambda$ -Methode.

Da  $\frac{\partial g}{\partial z} = -x(1-x) < 0$  für  $x \in (0, 1)$  ist die Voraussetzung der  $\varepsilon$ -Methode erfüllt. An den Punkten  $x = 0$ ,  $x = 1$  liegen keine Singularitäten, weshalb also die  $\varepsilon$ -Methode ohne Probleme funktionieren wird.

Eine doppelte Nullstelle kann sich nur bei  $z = 4$  und  $x = \frac{1}{2}$  ergeben. Grund:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = z(2x-1) \stackrel{!}{=} 0 \iff x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad g\left(\frac{1}{2}, z\right) = 1 - z\frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \iff z = 4$$

$F(z)$  hat dort also eine Pinch-Singularität. Der einzig heikle Punkt bei der  $\lambda$ -Methode wird also der Punkt  $z = 4$ ,  $x = \frac{1}{2}$  sein, denn dort wird der Pfad nicht verschoben und man integriert über eine Singularität. In unserem Beispiel ergibt sich allerdings folgende Situation:

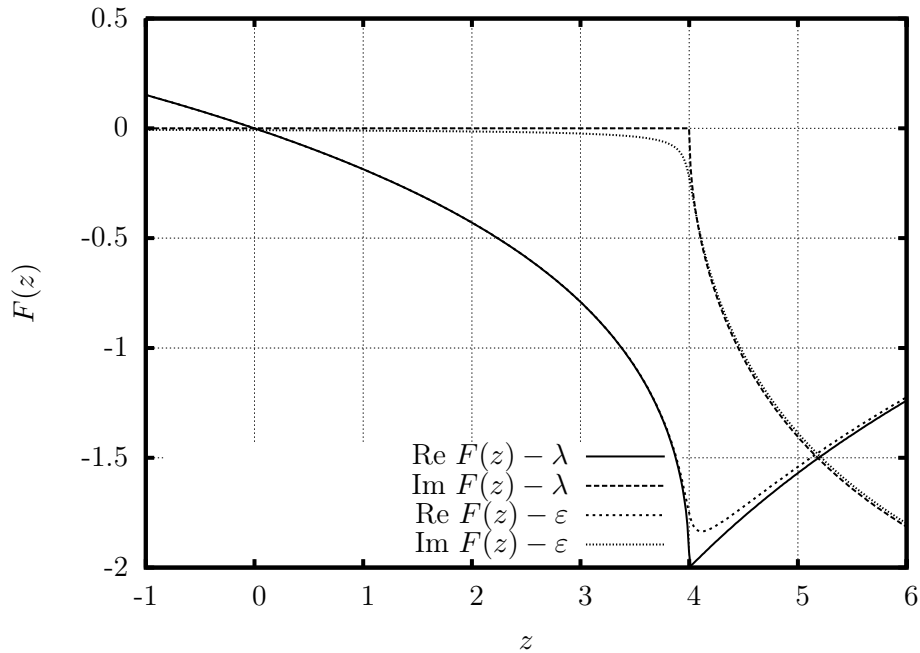
$$\int_0^1 \ln(1 - 4x(1-x)) dx = \int_0^1 \ln \left( 4 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right) dx = \int_0^1 \ln y^2 dy$$

mit  $y = 2(x - \frac{1}{2})$ . Somit ist diese Funktion integrierbar und sollte für die  $\lambda$ -Methode kein Problem darstellen.

Anders sieht dies allerdings aus in Beispielen, wo die Funktion  $F(z) = \int_0^1 [g(x, z) - i\varepsilon]^{-n} dx$  mit  $n \in \mathbb{N}$  berechnet wird. Hier wird sich zeigen, dass beim Grenzübergang  $z \rightarrow 4$  die Funktion  $F(z)$  divergiert.

### 3.1.2 Graphischer Vergleich der beiden Integrationsmethoden

Für die Funktion (6) werden nun die beiden numerischen Methoden ( $\varepsilon$ - und  $\lambda$ -Methode) mit der exakten analytischen Lösung aus (7) verglichen und in der folgenden Abbildung dargestellt. Dabei läuft  $z$  zwischen  $-1$  und  $6$ . Eingetragen sind jeweils der Real- und der Imaginärteil der Funktion  $F(z)$ . Die exakte Lösung wurde übersichtshalber weg gelassen, sie unterscheidet sich um maximal  $10^{-2}$  vom Ergebnis der  $\lambda$ -Methode.



**ABBILDUNG 19:** Die verschiedenen Methoden im Vergleich mit  $\varepsilon = 0.05, \lambda = 0.05$

Zu erkennen ist der stetig differenzierbare Übergang bei  $z = 0$ . Die beiden Kurven liegen ziemlich genau übereinander; nur um  $z = 4$  liegt die Kurve der  $\varepsilon$ -Methode etwas daneben.

Der Wert an der Stelle  $z = 4$  wurde in Abb. 20 für verschiedene  $\lambda$  und verschiedene  $\varepsilon$  eingetragen, wodurch der Fehler abgeschätzt werden kann. Man sieht, dass  $\varepsilon$  sehr klein gewählt werden muss, wenn genaue Resultate erwünscht sind. Weiter bleibt einmal mehr zu bemerken, dass das Resultat der  $\lambda$ -Methode für  $\lambda > 0$  unabhängig von  $\lambda$  ist, was in Abb. 20 sehr gut zum Vorschein kommt.

Bei Integranden mit stärkeren Singularitäten, beispielsweise  $g(x, z)^{-1}, g(x, z)^{-2}, \dots$ , wird der Unterschied dieser beiden Methoden immer deutlicher. Um den Integranden  $g(x, z)^{-4}$  zu berechnen, benötigt die  $\varepsilon$ -Methode so viele Integrationsschritte, dass nur noch Resultate für  $\varepsilon > 0.05$  berechnet werden können; diese sind dann allerdings sehr ungenau (teilweise Abweichung von über 400%).

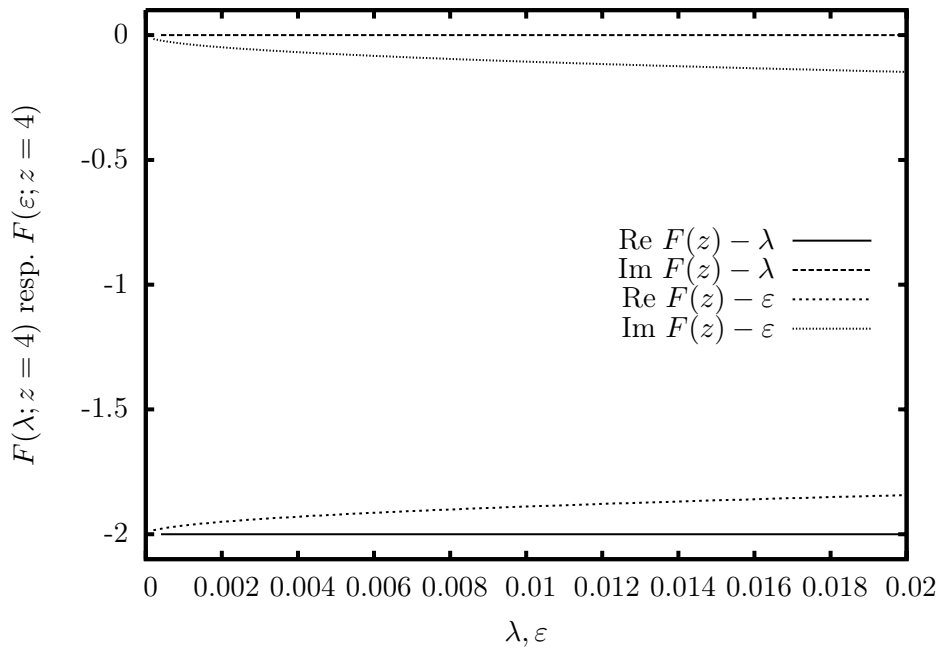


ABBILDUNG 20: Genauigkeiten der beiden Methoden bei  $z = 4$  für verschiedene Parameter  $\lambda$  und  $\varepsilon$ .

### 3.2 Zweischleifenintegrale

Mehrdimensionale Integrale der Form

$$F(z) = \int_0^1 d^j x [g(x_k, z) - i\varepsilon]^n, \quad k = 1, 2, \dots, j$$

können auch mit der  $\lambda$ -Methode berechnet werden. Dabei wird jedes  $x_k$  folgendermassen transformiert:

$$x_k \longrightarrow y_k = x_k - i\lambda x_k(1 - x_k) \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Auch hier gilt die Einschränkung  $\frac{\partial g}{\partial x_k} \neq 0$ , andernfalls wird der Pfad nicht verschoben.

#### 3.2.1 $z_{\text{ver}}$

Die erste Funktion, welche untersucht wurde, ist

$$F_I^{\text{ver}}(z) = \beta \int_0^1 dx_2 dx_3 \frac{1}{z_{\text{ver}}}, \quad \text{mit } z_{\text{ver}} = \sigma(1 - x_3) + x_3^2(1 - zx_2(1 - x_2)),$$

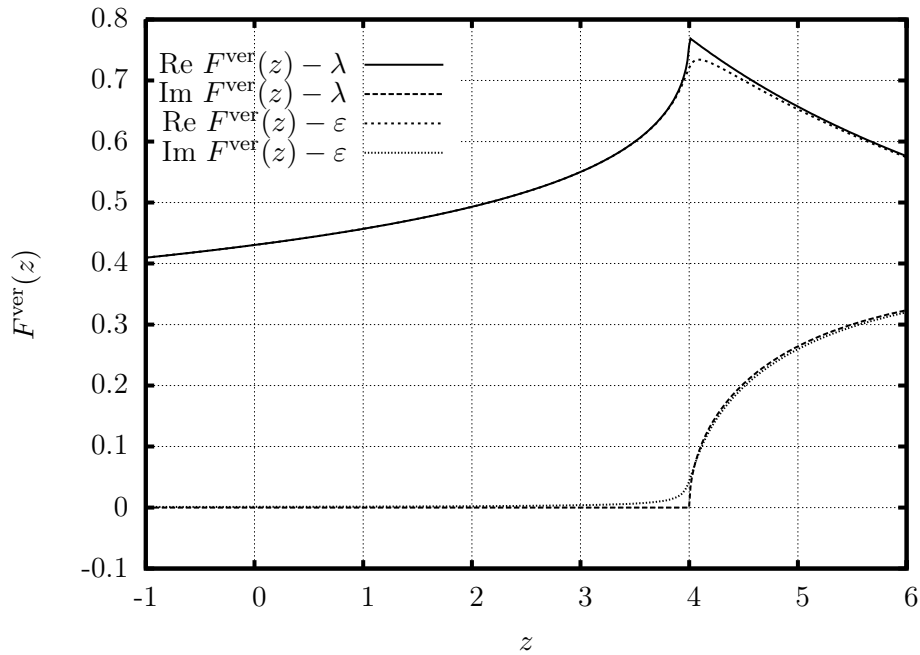
wobei die Konstanten  $\beta = 1$  und  $\sigma = 5$  gewählt wurden. Es wird über die Variablen  $x_2$  und  $x_3$  integriert, das Integral ist also zweidimensional.

Da  $\frac{\partial z_{\text{ver}}}{\partial z} < 0$  für alle  $x_2, x_3 \in (0, 1)$ , ist die Bedingung der  $\varepsilon$ -Methode erfüllt.

Die Nullstellen von  $z_{\text{ver}}$ , liegen allesamt an Positionen, bei welchen  $\frac{\partial z_{\text{ver}}}{\partial x_2} \neq 0$  und/oder  $\frac{\partial z_{\text{ver}}}{\partial x_3} \neq 0$ . Der Integrationspfad kann somit mithilfe der  $\lambda$ -Methode bei jeder Nullstelle entweder in die komplexe  $x_2$ -Ebene und/oder in die komplexe  $x_3$ -Ebene verschoben werden, was bedeutet dass die  $\lambda$ -Methode ohne Probleme die Berechnung ausführen kann.

Die Variablentransformation und die Parametrisierung des Weges auszurechnen wäre in diesem und in den folgenden Fällen ziemlich aufwändig; deshalb habe ich ein Maple-Skript geschrieben, welches für eine bestimmte Funktion  $g(x_i, z)$  diese beiden Vorgänge für maximal drei Integrationsvariablen  $(x_1, x_2, x_3)$  automatisch berechnet.

Das Ergebnis der numerischen Integration ist in Abb. 21 dargestellt. Es ist klar zu erkennen, dass die  $\varepsilon$ -Methode beim Punkt  $z = 4$  eine erhebliche Abweichung aufweist, obwohl  $\varepsilon$  relativ klein gewählt wurde.



**ABBILDUNG 21:**  $F_I^{\text{ver}}(z)$  wurde mit der  $\varepsilon$ -Methode und der  $\lambda$ -Methode berechnet. Die Parameter betragen  $\lambda = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .

### 3.2.2 $z_{\text{box}}$

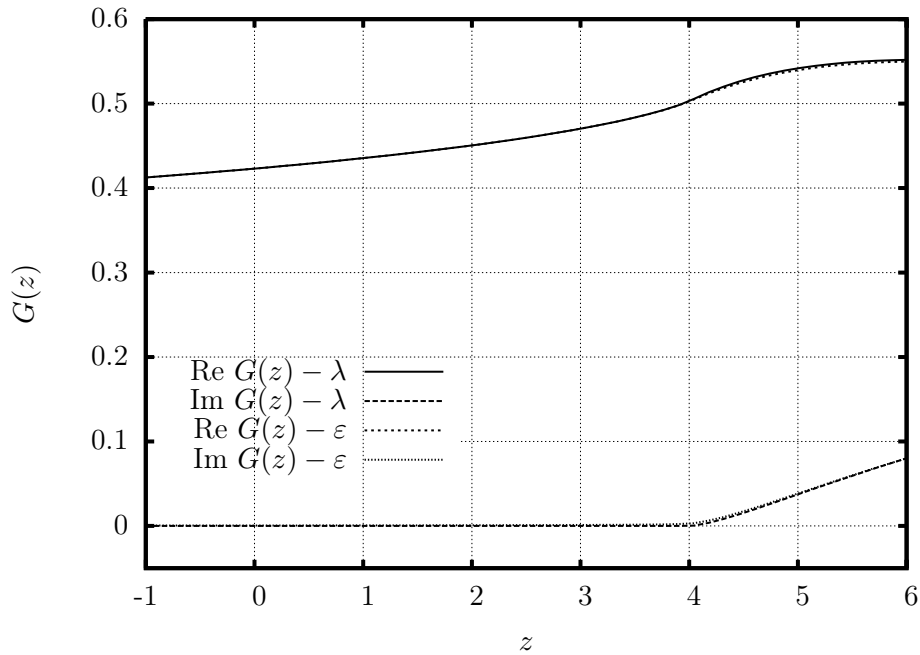
Als nächstes wurde die Funktion

$$G(z) = \int_0^1 \frac{d^3x}{z_{\text{box}}^n}, \quad \text{mit } z_{\text{box}} = x_2x_3[z(1-x_2)x_3 + (1-x_3)](1-x_1) + z_{\text{ver}}$$

betrachtet.

In diesem Beispiel können niemals alle partiellen Ableitungen  $(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3})$  an einer bestimmten Stelle  $(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  verschwinden, was bedeutet dass der Pfad bei der  $\lambda$ -Methode in jedem Punkt verschoben werden kann.

Die  $\varepsilon$ -Methode und die  $\lambda$ -Methode ergeben hier fast die gleichen Resultate (siehe Abb. 22), allerdings besteht ein grosser Unterschied hinsichtlich der Rechenzeit. Die Integrationsmethode rechnet bei der  $\lambda$ -Methode während nur etwa 1.5 Minuten; die  $\varepsilon$ -Methode dagegen beansprucht über 40 Minuten Rechenzeit. Der Algorithmus mit  $\lambda$ -Methode ist also rund 24 mal schneller.



**ABBILDUNG 22:**  $G(z)$  wurde mit der  $\epsilon$ -Methode und der  $\lambda$ -Methode gerechnet. Die Parameter betragen  $\lambda = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

### 3.3 Anomale Schwellen

Im Allgemeinen haben singuläre Stellen der Integralfunktion eine physikalische Bedeutung. Beispielsweise geben sie an, bei welchen Energien neue Teilchen entstehen können. Bei anomalen Schwellen hingegen können Singularitäten auftreten, welche keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben.

Ein Beispiel einer solchen Funktion ist

$$J_F(s) = \int_0^1 \frac{dx dy y}{z(x, y; s; m^2, M^2) - i\epsilon}, \quad \text{wobei} \quad z = Q^2 y^2 + m^2 - M^2 y,$$

mit  $Q^2 = M^2 - sx(1-x)$ .

Werden die Nullstellen von  $J_F(s)$  gesucht, an welchen sowohl die Ableitung nach  $x$  als auch die Ableitung nach  $y$  verschwinden, so ergeben sich die folgenden kritischen Punkte:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{2m^2}{M^2} \quad \text{und} \quad s = M^2 \left( 4 - \frac{M^2}{m^2} \right).$$

An diesen Punkten kann der Pfad weder in  $x$ - noch in  $y$ -Richtung verschoben werden, weshalb  $J_F(s)$  dort eine Pinch-Singularität besitzt. Es ist zu erkennen, dass diese Singularität erst auftritt für  $M^2 \geq 2m$ , denn  $y$  läuft nur zwischen 0 und 1. Weiter sieht man, dass sich diese Singularität für verschiedene Verhältnisse von  $\frac{M^2}{m^2}$  bewegen kann. Beispielsweise liegt die Singularität für  $M^2 = 2m^2$  bei  $s = 4m^2$ , für  $M^2 = 3m^2$  bei  $s = 3m^2$  oder für  $M^2 = 3.5m^2$  bei  $s = 1.75m^2$ , was auch in der Abb. 24 gut zu erkennen ist. Diese Singularität wird anomale Singularität genannt, da diese keine unmittelbare physikalische Bedeutung hat.

Die weiteren Singularitäten sind Endpunktsingularitäten. Um diese zu untersuchen werden zuerst die Integrationsgrenzen der ersten Integrationsvariable betrachtet ( $x = 0$  oder  $x = 1$ ).

In diesem Fall ergeben sich singuläre Stellen im Integranden, falls

$$x \in \{0, 1\}, \quad y = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \right).$$

Der Pfad kann mithilfe der  $\lambda$ -Methode in diesem Fall in die komplexe  $y$ -Ebene verschoben werden, ausser an den Punkten, wo eine doppelte Nullstelle liegt, was bei  $M^2 = 4m^2$  der Fall ist. Hier tritt eine Endpunktsingularität auf für beliebige  $s$ . Die Funktion  $J_F(s)$  kann für  $M^2 = 4m^2$  mit der  $\lambda$ -Methode nicht berechnet werden.

Um trotzdem Resultate zu erhalten wurde folgendes versucht:

- Die Funktion  $J_F(s)$  wird berechnet für  $M^2$  in der Nähe von  $4m^2$ . Dadurch erhält man einen Eindruck, wie die Funktion an der singulären Stelle aussehen könnte. Was auffällt ist, dass für  $M^2 > 4m^2$  der Imaginärteil von  $J_F(s)$  überall positiv ist; für  $M^2 < 4m^2$  dagegen ist er nur oberhalb der anomalen Singularität positiv und unterhalb ist er Null (siehe Abb. 23 und Abb. 24).
- Das Integrationsgebiet wird aufgeteilt und zwei sehr kleine Umgebungen um die Punkte  $x = 0, y = \frac{1}{2}$  und  $x = 1, y = \frac{1}{2}$  werden ausgelassen und separat integriert. Hält man diese Umgebungen sehr klein, so kann man ein akzeptables Resultat erwarten. Die ursprüngliche Idee war, in diesen kleinen Umgebungen  $z(x, y; s; m^2, M^2)$  durch Taylorreihen zu entwickeln und die quadratischen Terme wegzulassen; dies war aber immer noch nicht integrierbar, da die Entwicklungen die selben doppelten Nullstellen aufwiesen, womit die  $\lambda$ -Methode nicht zurecht kam. Es wurde noch versucht diese kleinen Gebiete einfach wegzulassen und gar nicht zu integrieren, allerdings ergab sich dabei kein sinnvolles Resultat – der Imaginärteil von  $J_F(s)$  war negativ.

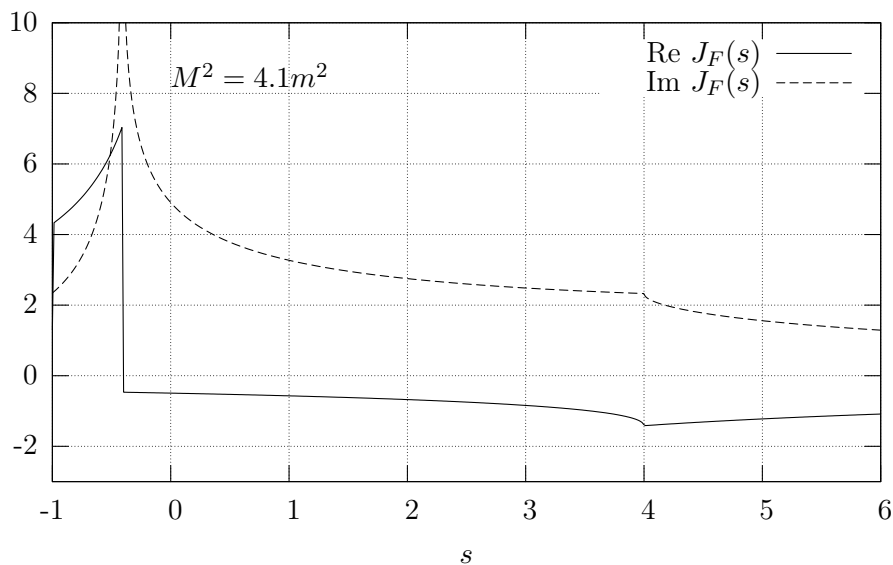
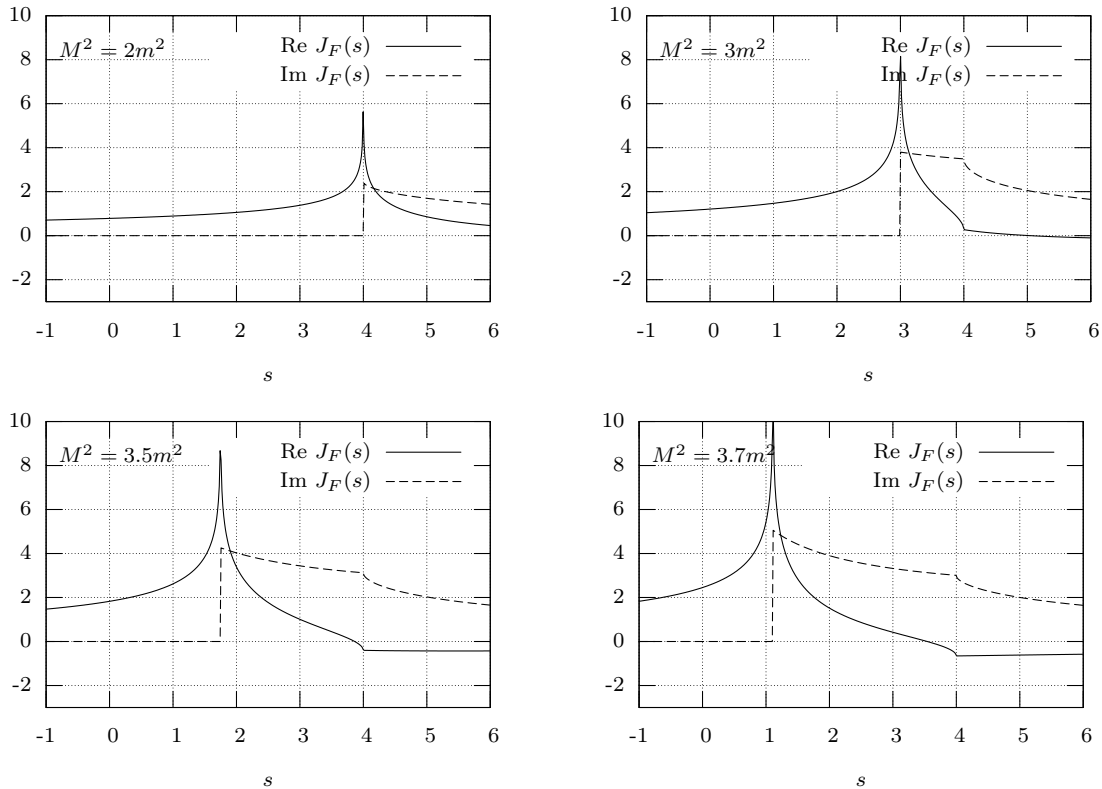


ABBILDUNG 23:  $J_F(s)$  für  $M^2 > 4m^2$

Eine weitere Endpunktsingularität tritt auf, wenn

$$y = 1, \quad x = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \right),$$

wodurch eine doppelte Nullstelle bei  $s = 4m^2$  zustande kommt. Diese Singularität ist jedem der Diagramme in Abb. 24 gut zu erkennen.



**ABBILDUNG 24:** Bei einer anomalen Schwelle können physikalisch bedeutungslose Singularitäten auftreten, wie hier die Singularität weiter links, welche ihre Position ändert für verschiedene  $\frac{M^2}{m^2}$ , wobei hier  $m^2 = 1$  gesetzt wurde.

Diese Grafiken wurden ausschliesslich mit der  $\lambda$ -Methode berechnet, da die  $\varepsilon$ -Methode hier viel zu viel Rechenzeit in Anspruch genommen hätte.

Ob der Realteil von  $J_F(s)$  bei der anomalen Singularität gegen unendlich geht, lässt sich numerisch nicht abschliessend beurteilen. Wird der entsprechende Ausschnitt in der Nähe der Singularität genauer berechnet, so nehmen die Werte immer ein wenig zu, allerdings kann nicht entschieden werden, ob diese im Grenzfall gegen einen bestimmten Wert konvergieren oder gegen unendlich streben.

## 4 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Methoden zur Lösung von sogenannten Feynmanintegralen vorgestellt und besprochen.

Feynmanintegrale spielen eine Rolle in der Quantenfeldtheorie und sind komplexe Funktionen, die durch eine Integraldarstellung gegeben sind. Eigenschaften dieser Integraldarstellungen, wie beispielsweise die Art von Singularitäten, wurden durch Methoden wie der Verformung des Integrationspfades aufgezeigt. Des Weiteren wurde die Methode der Dispersionsrelation vorgestellt, bei welcher die Integraldarstellung umgeschrieben werden kann um die Singularitäten zu verdeutlichen.

Feynmanintegrale wurden auch numerisch berechnet. Dazu wurden zwei Methoden benutzt:

- Die erste Methode beruht darauf, dass ein (oder mehrere) physikalischer Parameter mit einem kleinen komplexen Imaginärteil versehen werden. Dadurch können nicht definierte Stellen der Integraldarstellung vermieden werden.
- Bei der zweiten Methode wird der Integrationspfad in der komplexen Ebene so verschoben, dass das Integral auch für reelle Parameter ausgewertet werden kann.

Es wurde gezeigt, dass die zweite Methode kürzere Rechenzeiten aufweist und viel genauere Resultate liefert. Der Grund liegt darin, dass bei der ersten Methode die Parameter einen möglichst kleinen Imaginärteil besitzen müssen, andernfalls ergibt sich nicht das richtige Resultat. Der Imaginärteil darf aber auch nicht zu klein gewählt werden, da sonst der Rechenaufwand erheblich zunimmt. Die zweite Methode hingegen liefert stets das exakte Resultat, unabhängig davon wie weit der Pfad verschoben wird. Diese Tatsache beruht auf dem Integralsatz von Cauchy.

Mithilfe dieser Methoden wurden einige Feynmanintegrale mit Erfolg numerisch berechnet und ihre Eigenschaften diskutiert.

## A Mathematischer Anhang

### A.1 Kurze Zusammenfassung der komplexen Analysis

#### Notation:

$z \in \mathbb{C}$  sei eine komplexe Zahl mit  $z = x + iy$ , wobei  $x, y \in \mathbb{R}$  zwei reelle Zahlen sind. Weiter sei  $f$  eine komplexe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , wobei  $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Holomorphie

Die Funktion  $f$  heisst holomorph in einem Gebiet  $G$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $z \in G$  komplex differenzierbar ist. Dies bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$  für alle  $z \in G$  existieren und die folgenden Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\frac{d}{d\bar{z}}f(z) \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Die Ableitung von  $f(z)$  beträgt dann

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

#### Komplexe Integrale

Ein Integral in der komplexen Ebene führt stets entlang einer Kurve, welche mit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma : t \mapsto z(t)$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  parametrisiert wird. Dadurch kann das Integral auf zwei reelle Integrale zurückgeführt werden:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt = \int_a^b \operatorname{Re} \left( f(z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \left( f(z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

#### Satz von Cauchy für den Kreis

Ist  $f$  holomorph auf einer Kreisscheibe, so ist

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für alle Kurven  $\gamma$ , welche vollständig in der Kreisscheibe verlaufen und geschlossen sind.

Daraus folgt insbesondere, dass Integrale über nicht geschlossene Kurven unabhängig vom gewählten Weg sind, solange der Weg innerhalb der Kreisscheibe verläuft.

#### Cauchy-Integralformel

Ist  $f$  holomorph in einem Gebiet  $G$  und  $\gamma \subset G$  eine im Gegenuhrzeigersinn orientierte geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidung, so ist  $f$  beliebig oft differenzierbar mit den Ableitungen

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)}} d\zeta$$

für alle  $z$  innerhalb der Kurve  $\gamma$ .

Insbesondere ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

## A.2 Singularitäten und analytische Fortsetzungen

### Singularitäten

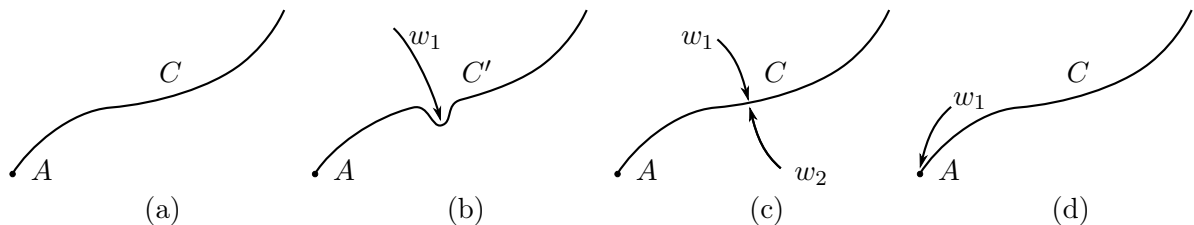
Ist die Funktion  $F(z)$  holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ , so heissen die Punkte  $z_0, z_1, z_2, \dots$  isolierte Singularitäten der Funktion  $F(z)$ .

Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $F(z)$ , so gibt es drei Möglichkeiten:

- $z_0$  heisst **hebbare Singularität**, falls  $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = c \in \mathbb{C}$
- $z_0$  heisst **Pol**, falls  $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \infty$
- $z_0$  heisst **wesentliche Singularität**, falls der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z)$  nicht existiert.

Besitzt  $F(z)$  eine Integraldarstellung entlang eines Pfades  $C$ , so kann beim Grenzübergang  $z \rightarrow z_0$  folgendes passieren:

- Der Integrand besitzt keine singulären Stellen (siehe Abb. 25 (a)) oder diese sind weit vom Integrationspfad  $C$  entfernt, dann ist  $z_0$  keine Singularität von  $F(z)$  (oder eine hebbare).
- Beim Grenzübergang nähert sich eine (oder mehrere) singuläre Stelle ( $w_1$ ) dem Integrationspfad aus der selben Richtung (siehe Abb. 25 (b)). Dann kann der Pfad  $C$  in die entgegengesetzte Richtung verschoben werden, so dass  $z_0$  auch hier keine oder eine hebbare Singularität ist.
- Beim Grenzübergang nähern sich mindestens zwei singuläre Stellen des Integranden dem Integrationspfad aus verschiedenen Richtungen (siehe Abb. 25 (c)). Dadurch wird der Integrationspfad eingeklemmt und kann nicht verschoben werden, was zu einer Singularität von  $F(z)$  bei  $z = z_0$  führt. Eine solche Singularität wird auch **Pinch-Singularität** genannt (engl. pinch = (ein)klemmen).
- Eine (oder mehrere) singuläre Stelle des Integranden nähert sich einem Endpunkt  $A$  des Integrationspfades (siehe Abb. 25 (d)). Die Endpunkte sind fest, sie dürfen somit nicht verschoben werden. Es entsteht also bei  $z_0$  eine Singularität in  $F(z)$ , die auch **Endpunktsingularität** genannt wird.



**ABBILDUNG 25:** (a): Ursprünglicher Integrationspfad  $C$  mit Endpunkt  $A$ . (b): eine Singularität  $w_1$  nähert sich dem Integrationspfad, dieser wird nach  $C'$  verschoben. (c): Zwei Singularitäten  $w_1$  und  $w_2$  nähern sich aus verschiedenen Richtungen dem Integrationspfad, dieser wird eingeklemmt und kann deshalb nicht verschoben werden. (d): Die Singularität nähert sich dem Endpunkt  $A$ , welcher nicht verschoben werden kann.

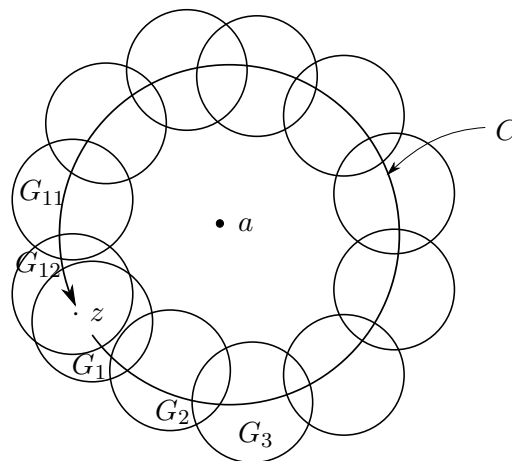
### Analytische Fortsetzungen

Ist eine Funktion  $F_1(z)$  holomorph in einem bestimmten Gebiet  $G_1 \subset \mathbb{C}$ , so besitzt sie dort eine eindeutige Reihenentwicklung

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Um die Funktion  $F_1(z)$  in einem anderen Gebiet  $G_2 \subset \mathbb{C}$  (wobei  $G_2 \cap G_1$  eine offene Menge bildet) analytisch fortzusetzen, muss sich eine Funktion  $F_2(z)$  finden lassen, welche holomorph ist in  $G_2$  und in der Überlappung von  $G_1 \cap G_2$  eine identische Reihenentwicklung wie  $F_1(z)$  aufweist.

Man spricht von einer analytischen Fortsetzung der Funktion  $F_1(z)$  entlang eines Weges  $C$ , wenn der Weg  $C$  vollständig mit sich überlappenden Mengen  $G_i$  überdeckt werden kann und die Reihenentwicklungen in den Überlappungen der Mengen übereinstimmen (Beispiel in Abb. 26). Eine solche Fortsetzung hängt im allgemeinen von der Wahl des Weges  $C$  ab. Somit kann es auch sein, dass eine Fortsetzung entlang eines geschlossenen Weges um eine Singularität nicht wieder auf die ursprüngliche Funktion  $F_1(z)$  führt.



**ABBILDUNG 26:** Die Funktion  $F_1(z)$ , definiert in der Kreismenge  $G_1$ , wird analytisch fortgesetzt zu  $F_2$  (definiert in  $G_2$ ),  $\dots$ , bis zur Funktion  $F_{12}$  (definiert in  $G_{12}$ ). Dabei muss  $F_1(z)$  nicht unbedingt identisch sein mit  $F_{12}(z)$ , wenn  $a$  eine Singularität von  $F_i(z)$  ist.

Nachfolgend zwei typische Anwendungen: die Wurzelfunktion und der Logarithmus.

**Wurzelfunktion** Da die Wurzelfunktion  $F(z) = \sqrt[n]{z}$  als Umkehrfunktion von  $G(w) = w^n$  definiert ist, beschreibt sie keine eindeutige Abbildung. Zu jedem  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt es  $n$  Wurzeln.

Um eine (holomorphe) Wurzelfunktion  $F_1(z)$  zu erhalten, muss man sich auf eine Wurzel festlegen. Setzt man diese Funktion entlang eines Weges um den Nullpunkt analytisch fort, so erhält man die Wurzelfunktion  $F_2(z) = F_1(z) \exp\left(\frac{\ln z}{n}\right)$ . Diese Fortsetzung kann man  $n$ -mal durchführen bis man wieder die ursprüngliche Funktion  $F_1(z)$  erhält.

Um nun eine eindeutige Wurzelfunktion festzulegen, muss auf irgend einer Stelle in der komplexen Zahlenebene ein sogenannter **Schnitt** eingeführt werden, der vom Nullpunkt aus-

gehend bis ins Unendliche führt. An diesem Schnitt ist die Wurzelfunktion nicht definiert, es existieren nur der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert.

Üblicherweise wählt man diesen Schnitt entlang der negativen reellen Achse. Die Wurzelfunktion ist also holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$  und so gewählt, dass sie positive reelle Zahlen liefert für  $z \in \mathbb{R}^+$ .

**Logarithmus** Auch der Logarithmus ist eine Umkehrfunktion; definiert als  $F^{-1}(e^x)$  und somit keine eindeutige Abbildung ( $z = e^x = e^{x+2\pi i}$ , somit ist  $x$  und  $x + 2\pi i$  ein Logarithmus von  $z$ ). In Polarkoordinaten gibt es eine einfache Darstellung des Logarithmus:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

Setzt man die Argumentfunktion entlang eines Weges um den Nullpunkt analytisch fort, so kommt bei jeder Umrundung ein Faktor  $2\pi i$  dazu. Somit kann man die Logarithmus-Funktion beliebig oft analytisch um den Nullpunkt fortsetzen und wird nie wieder die ursprüngliche Funktion erhalten.

Die Funktion  $\arg(z)$  wird nun so definiert, dass sie nur Werte zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  liefert, wodurch der Logarithmus eine eindeutige Funktion wird, welche holomorph ist in  $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ .

## Literatur

- [1] C. ANASTASIOU, S. BEERLI A. DALEO: Evaluating multi-loop feynman diagrams with infrared and threshold singularities numerically, JHEP 05 (2007) 071, [arXiv:hep-ph/0703282v2].
- [2] REIMANN, PROF. DR. H.-M.: Analysis 4, Skript zur Vorlesung. 2007.
- [3] WIKIPEDIA: Wikipedia.  
<http://de.wikipedia.org>.